L'objectif de ce TD est programmer et de comparer deux méthodes numériques qui permettent la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Pour illustrer ces deux méthodes, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

PARTIE A : ETUDE MATHÉMATIQUE.

1. Déterminer $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution et localiser celle-ci entre deux entiers consécutifs a et b.

PARTIE B : RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE DICHOTOMIE.

1. Créer les fonctions `f` et `fprime`.
2. Ecrire une fonction `Dichotomie(f,p,a,b)`, prenant en argument la fonction f, un entier p et les bornes a et b de l'intervalle sur lequel on applique la méthode de dichotomie. Cette fonction doit retourner une valeur approchée à 10^{-p} près de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

PARTIE C : RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE NEWTON.

Cette méthode consiste à approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$ par une suite (x_n), où les termes x_n de cette suite sont les abscisses des points d'intersection entre des tangentes successives à la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1. On pose $x_0 = 0$. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0. En déduire la valeur de x_1, abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses.
2. On note (T_1) la tangente au point d'abscisse x_1 et x_2 l'abscisse du point d'intersection de (T_1) avec l'axe des abscisses ; et on continue ainsi la construction de la suite (x_n)... Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Ecrire alors une fonction `Newton(f,p,a)`, prenant en argument la fonction f, un entier p et un réel a, premier terme de la suite (x_n). Cette fonction doit retourner une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$, et s'arrête lorsque $|f(x_n)| \leqslant 10^{-p}$.

PARTIE D : COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES.

1. Expliquer le principe permettant de déterminer le nombre d'itérations nécessaires dans chacune de ces fonctions afin d'obtenir une valeur approchée α de la solution de l'équation $f(x) = 0$ telle que $|f(\alpha)| \leqslant 10^{-p}$.
2. Modifier alors les deux fonctions `Dichotomie(f,p,a,b)` et `Newton(f,p,a)` pour obtenir le nombre d'itérations nécessaires et ainsi pouvoir comparer ces deux méthodes numériques.